

ISTITUTO PROFESSIONALE PER L'INDUSTRIA L'ARTIGIANATO

63039 SAN BENEDETTO DEL TRONTO (AP)

Classe: 4 A TIEN

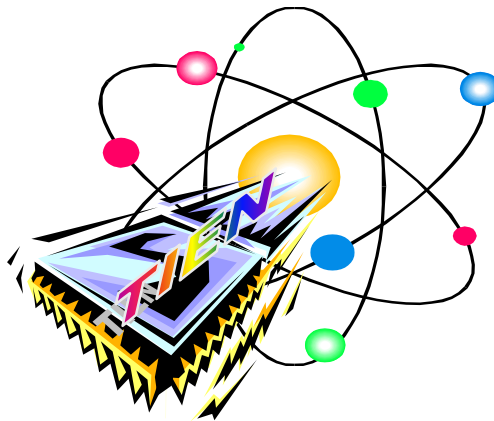
Anno Scolastico: 2009-2010

Modulo 2

SISTEMI e MODELLI

■ Analisi numerica:

- richiamo numeri complessi
- variabile complessa, funzione di variabile complessa
- definizione di POLI e ZERI di una funzione $F(s)$;
- funzione di trasferimento;
- Trasformata di Laplace (concetti fondamentali)



SISTEMI, AUTOMAZIONE E ORGANIZZAZIONE DELLA PRODUZIONE

Internet: <http://didattica2000.altervista.org>
<http://www.ipia.it>

3.LA TRASFORMATATA DI LAPLACE

3.1 – Introduzione

Lo studio dei sistemi richiede conoscenze specifiche di matematica. Per studiare il comportamento di un sistema nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza è necessaria la conoscenza dei numeri complessi, delle funzioni di variabile complessa e dei metodi di soluzione delle equazioni differenziali, quindi, si ritiene opportuno richiamare le operazioni fondamentali che possono essere eseguite con i numeri complessi, esaminare alcuni concetti elementari relativi alle funzioni di variabile complessa e formalizzare le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace.

3.2 – Numeri complessi

Un numero complesso Z , costituito da una parte reale e una parte immaginaria, è scritto nella seguente forma:

$$Z = x + jy$$

dove x e y sono numeri reali, j è l'unità immaginaria definita dalla relazione

$$j^2 = -1 \quad J = \sqrt{-1}$$

e il segno “+” non indica l'operazione di addizione ma è parte integrante del numero complesso. La parte reale e quella immaginaria del numero complesso Z , indicate anche con $\text{Re}(Z)$ e $j\text{Im}(Z)$, sono uguali rispettivamente a x e jy .

Il numero complesso Z è rappresentato sul piano complesso nel quale l'asse delle ordinate è l'asse immaginario e l'asse delle ascisse è quello reale (fig.1).

Definizione di:

- **coniugato**
- **modulo**
- **fase o argomento**
- Si definisce **coniugato** del numero complesso $Z = x + jy$, il numero complesso Z^* che ha il coefficiente della sua parte immaginaria opposto a quello di Z :

$$Z = x + jy \quad \text{coniugato} \quad Z^* = x - jy$$

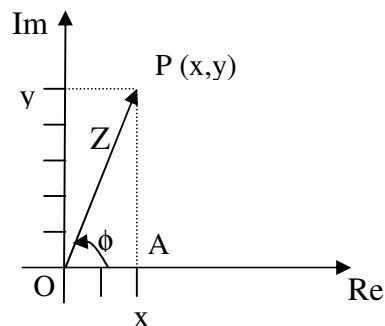


Fig.1

- Si definisce **modulo** $|Z|$ del numero complesso Z la radice quadrata della parte reale al quadrato più la parte immaginaria al quadrato.

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Si definisce **fase o argomento** di un numero complesso Z , definito a meno di multipli interi di 2π , l'angolo la cui tangente goniometrica è uguale al rapporto tra il coefficiente y della parte immaginaria e la parte reale x :

$$\phi = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{e nella forma completa si ha: } \phi = \arctg \frac{y}{x} \pm 2k\pi \text{ con } k \text{ intero positivo.}$$

Al numero complesso Z è associato un vettore OP che individua un punto P del piano complesso avente coordinate (x,y) . Sono considerati positivi gli angoli ϕ misurati rispetto all'asse reale del vettore OP che ruota in senso (Fig.1), quindi:

$$x = |Z| \cos \phi \quad y = |Z| \sin \phi$$

e pertanto un numero complesso $Z = x + jy$ può essere scritto in forma **trigonometrica**

$$Z = x + jy \quad Z = |Z| \cdot (\cos \phi + j \sin \phi)$$

Un numero complesso può essere rappresentato nelle seguenti forme equivalenti

forma trigonometrica $z = |z| (\cos \phi + j \sin \phi)$

forma cartesiana $z = x + jy$

forma esponenziale $z = |z| e^{j\phi}$

forma polare $z = |z| \angle \phi$

Esempio

Dato il numero complesso $Z = 2 + j5$:

1. rappresentare il vettore nel piano complesso;
2. calcolare il suo coniugato;
3. calcolare il suo modulo;
4. calcolare la fase o argomento.

1- Rappresentazione grafica (Fig. 2)

2- Coniugato

$$Z = 2 + j5 \quad \rightarrow \quad \text{Coniugato} \quad Z^* = 2 - j5$$

3- Modulo

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5,4$$

4- Fase

$$\phi = \arctg \frac{5}{2} = \arctg 2,5 = 68,2^\circ$$

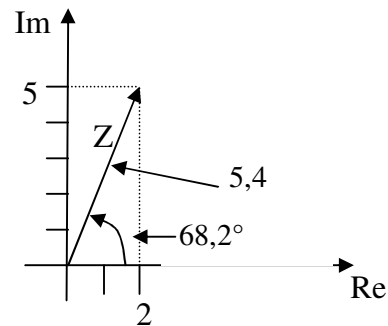


Fig. 2

3.2.1- Operazioni con i numeri complessi.

- **Addizione.**

La somma di due numeri complessi $z_1 = x_1 + j y_1$ e $z_2 = x_2 + j y_2$ è il numero complesso z che ha la parte reale uguale alla somma algebrica delle parti reali di z_1 e z_2 e il coefficiente della parte immaginaria uguale alla somma algebrica dei coefficienti delle parti immaginarie di z_1 e di z_2 :

$$Z = Z_1 + Z_2 = (x_1 + j y_1) + (x_2 + j y_2) \quad \rightarrow \quad z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Esempio: $Z_1 = 3 + j4$ $Z_2 = 5 + j2$ $Z_1 + Z_2 = (3 + j4) + (5 + j2) = 8 + j6$

- **Sottrazione.**

La differenza $z_1 - z_2$ di due numeri complessi, essendo $z_1 = x_1 + j y_1$ il minuendo e $z_2 = x_2 + j y_2$ il sottraendo, è il numero complesso z che ha la parte reale uguale alla differenza delle parti reali di z_1 e di z_2 , mentre il coefficiente della parte immaginaria è uguale alla differenza dei coefficienti delle parti immaginarie di Z_1 e di Z_2 :

$$Z = Z_1 - Z_2 = (x_1 + j y_1) - (x_2 + j y_2) \quad \rightarrow \quad Z = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Esempio: $Z_1 = 3 + j4$ $Z_2 = 5 + j2$ $Z = Z_1 - Z_2 = (3 + j4) - (5 + j2) = -2 + j2$

- **Prodotto.**

Il prodotto di due numeri complessi $Z_1 = x_1 + j y_1$ e $Z_2 = x_2 + j y_2$ è il numero complesso Z così definito:

$z = (x_1 + j y_1) \cdot (x_2 + j y_2)$ Eseguendo le operazioni indicate e ricordando che $j^2 = -1$ si ha:

$$Z = x_1 \cdot x_2 + j \cdot x_1 \cdot y_2 + j \cdot y_1 \cdot x_2 + j^2 \cdot y_1 \cdot y_2 \quad Z = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Esempio: $Z_1 = 3 + j4$ $Z_2 = 5 + j2$ $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (3 + j4) \cdot (5 + j2) = 15 + j6 + j20 + j^2 8 \quad Z = 7 + j26$

- **Divisione.**

Il quoziente di due numeri complessi $Z_1 = x_1 + j y_1$ e $Z_2 = x_2 + j y_2$ con Z_1 dividendo e Z_2 divisore, è uguale a

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + j y_1}{x_2 + j y_2}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore per il complesso coniugato del denominatore si ottiene il quoziente Z nella forma nota $Z = x + j y$

$$Z = \frac{(x_1 + j y_1) \cdot (x_2 - j y_2)}{(x_2 + j y_2) \cdot (x_2 - j y_2)} \quad Z = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + j \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

Esempio: $Z_1 = 1 + j3$, $Z_2 = 3 + j2$ $Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + j3}{3 + j2} = \frac{(1 + j3) \cdot (3 - j2)}{(3 + j2) \cdot (3 - j2)} = \frac{3 - j2 + j9 - j^2 6}{3^2 + 2^2}$

$$Z = \frac{9 + j7}{13} = \frac{9}{13} + j \frac{7}{13}$$

3.3 - Variabile complessa.

Dato un insieme di numeri complessi, si definisce variabile complessa s un elemento qualsiasi dell'insieme tale che sia:

$$s = \sigma + j\omega \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ in regime sinusoidale } \sigma=0, \text{ quindi } s=j\omega$$

ω = pulsazione del segnale sinusoidale. f = frequenza del segnale. T = periodo del segnale.

Dal punto di vista grafico la parte reale σ è rappresentata sull'asse orizzontale e quella immaginaria $j\omega$ sull'asse verticale del piano complesso s (fig. 3).

Vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano complesso s e gli elementi s dell'insieme dei numeri complessi. Ad un arbitrario punto P_0 del piano complesso s si fa corrispondere la variabile complessa $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, avente parte reale σ_0 e parte immaginaria $j\omega_0$ e al numero complesso s_0 si fa corrispondere il punto P_0 del piano complesso.

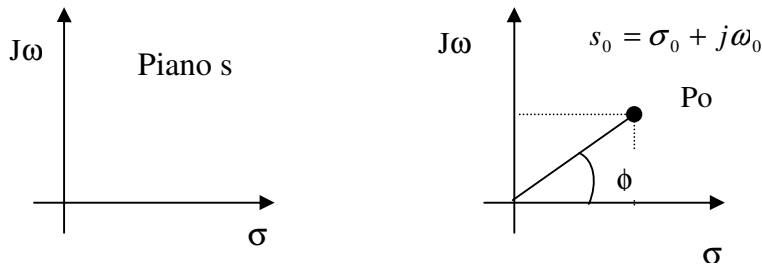


Fig. 3

Il modulo $|s_0|$ e la fase ϕ della variabile s_0 sono uguali a:

$$|s_0| = \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2} \quad \phi = \arctg \frac{\omega_0}{\sigma_0}$$

3.4 - Funzione di variabile complessa.

Una funzione $F(s)$ è detta funzione della variabile complessa s quando ad ogni s corrisponde una $F(s)$ tale che

$$F(s) = \text{Re}[F(s)] + j\text{Im}[F(s)]$$

dove $\text{Re}[F(s)]$ e $\text{Im}[F(s)]$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione $F(s)$. Il modulo e la fase vengono calcolati con le stesse regole viste nei punti precedenti

Per rappresentare la $F(s)$ sono necessari due grafici bidimensionali. Il primo, rappresentato sul piano s , è un grafico che riporta la parte reale σ sull'asse delle ascisse e quella immaginaria $j\omega$ su quello delle ordinate (fig. 4a). Il secondo, rappresentato sul piano $F(s)$, si ottiene rappresentando la parte reale $\text{Re}[F(s)]$ sull'asse delle ascisse e la parte immaginaria $\text{Im}[F(s)]$ su quello delle ordinate (fig. 4b).

Le funzioni di variabile complessa che sono oggetto di studio nella teoria dei sistemi sono quelle "univoche", così dette perché ad ogni valore s_0 della variabile complessa s corrisponde una ed una sola funzione; ne $F(s_0)$ nel piano $F(s)$.

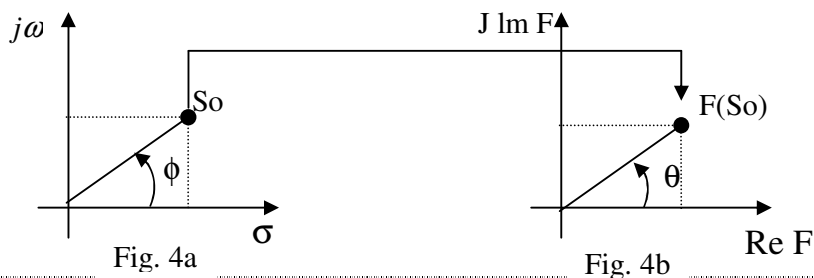


Fig. 4a

Fig. 4b

3.5 - Definizione di POLI e ZERI di una funzione F(s).

Molte applicazioni della teoria dei sistemi implicano lo studio di funzioni di variabile complessa espresse come rapporto di due polinomi in s del tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ZERI della funzione F(s)

Uguagliando a zero il numeratore ($N(s)=0$) e risolvendo rispetto a s si ottengono **m** radici, indicate con **z1, z2, z3, ... zm** o **ZERI** della funzione F(s).

POLI della funzione F(s)

Uguagliando a zero il denominatore ($D(s)=0$) e risolvendo rispetto a s si ottengono **n** radici, indicate con **p1, p2, p3, ... pn** o **POLI** della funzione F(s)

I POLI e gli ZERI, in quanto radici delle equazioni ottenute uguagliando a zero polinomi con coefficienti reali, possono essere:

1. reali semplici;
2. reali con molteplicità r;
3. complessi coniugati;
4. complessi coniugati con molteplicità r.

Applicando le regole dell'algebra si ottiene::

$$F(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = k_0 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

dove:

1. k_0 coefficiente numerico
2. z_1, z_2, z_m ZERI della funzione F(s)
3. p_1, p_2, p_n POLI della funzione F(s)

Esempio

Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{5 \cdot (s + 3)}{s \cdot (s + 2) \cdot (s + 4)^2}$$

1. $k_0=5$
2. Uguagliando a zero il numeratore si ottengono, gli **ZERI**: $s+3=0$, quindi **z1=-3**
3. Uguagliando a zero il suo denominatore si ottengono, i **POLI**: $s \cdot (s+2) \cdot (s+4)^2$, quindi: **p1=0, p2=-2, p3=-4** con molteplicità pari a **2**

3-6 Funzione di trasferimento (f.d.t.)

Dato un sistema si definisce funzione di trasferimento il rapporto tra la grandezza d'uscita e la grandezza d'ingresso (Fig. 5)

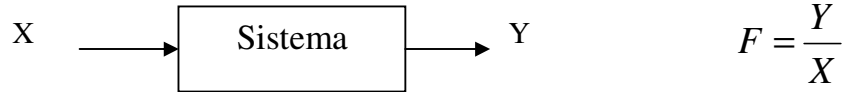


Fig. 5

Si possono presentare due casi:

1. Studio del sistema nel dominio del tempo, quindi f.d.t. nel dominio del tempo
2. Studio del sistema nel dominio delle frequenze, quindi f.d.t. nel dominio s

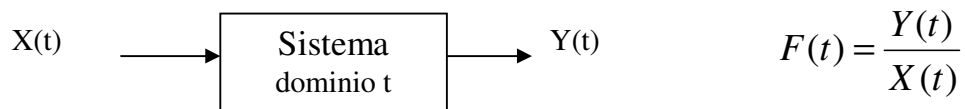
3-6-1 Dominio del tempo (fig.6) esempio carica scarica condensatore

Fig. 6

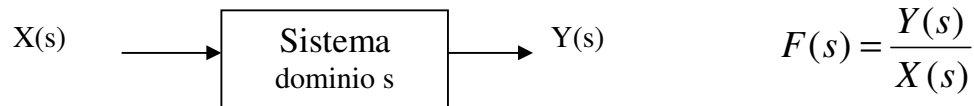
3-6-2 Dominio s (fig.7) esempio risposta in frequenza di un filtro

Fig. 7

3-7 Trasformata di LAPLACE

La ricerca del legame ingresso uscita (f.d.t. funzione di trasferimento) in un qualsiasi sistema (es. sistema di controllo), porta in generale ad identificare la struttura matematica di un'equazione integro-differenziale, un'equazione che ha come incognite le funzioni che rappresentano analiticamente l'andamento nel tempo delle grandezze d'ingresso e d'uscita (Fig.8)

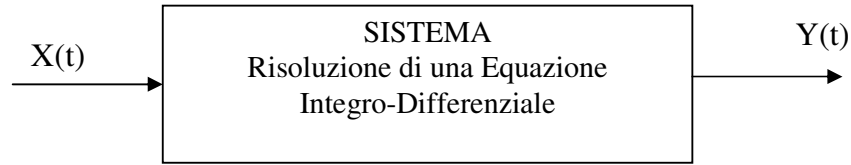


Fig. 8

La risoluzione del circuito con equazione integro-differenziale risulta molto complessa quindi si preferisce trasformare l'equazione in un'equazione di tipo algebrica. Nella trasformazione in equazione algebrica basta conoscere le singole parti a blocchi funzionali e saper combinare i singoli blocchi. Per ottenere questa trasformazione da equazione integro-differenziale a equazione algebrica si utilizza la **trasformata di Laplace** (Fig.9).

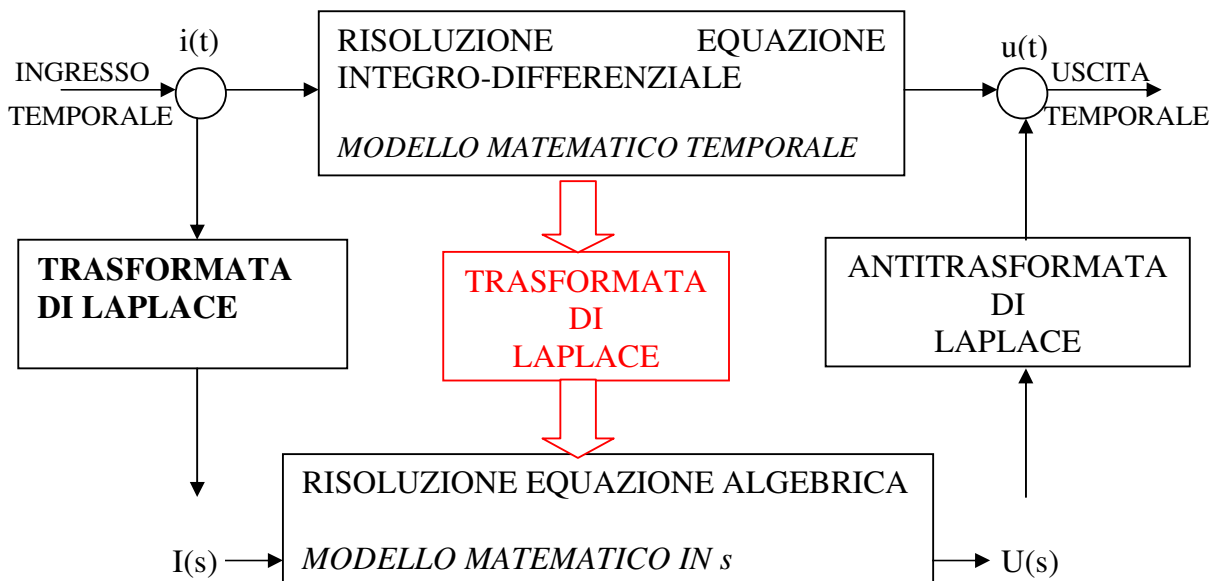


Fig. 9

Nella pratica il modello matematico del sistema e la sollecitazione ad esso applicata, funzioni della variabile tempo (t), sono trasformati in funzione della variabile complessa s. dopo aver definito le relazioni algebriche che descrivono il comportamento del sistema nel dominio della variabile s, con un'operazione di antitrasformazione si ottiene la risposta cercata u(t) la quale è funzione del tempo. La conoscenza della u(t) permette così di analizzare il comportamento del sistema nel dominio del tempo. La risoluzione delle equazioni integro-differenziali si riduce alla risoluzione di più semplici equazioni algebriche, facilitando così lo studio di sistemi formati da molti componenti.

L'operazione di trasformazione (Fig. 10) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'insieme di partenza definito da una funzione $f(t)$ del tempo e quelli dell'insieme di arrivo definito da una funzione $F(s)$ dipendente dalla variabile complessa s .

$$s = \sigma + j\omega \quad \omega = 2\pi f \quad \text{in regime sinusoidale } \sigma = 0, \text{ quindi } s = j\omega$$

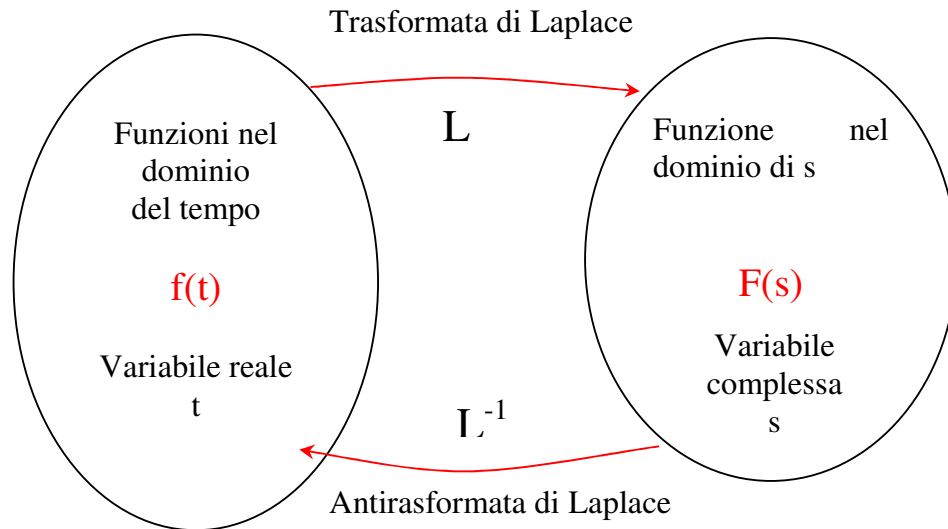


Fig. 10

Data una funzione del tempo $f(t)$ tale che $f(t)=0$ per $t<0$ si definisce trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e si indica con $L[f(t)] = F(s)$, la funzione $F(s)$ della variabile complessa S

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} * f(t) * dt$$

La trasformata di Laplace viene utilizzata per semplificare le soluzioni delle equazioni differenziali a coefficienti costanti, permette di semplificare lo studio dei sistemi complessi riducendoli a schemi a blocchi. In fig. 11 la trasformazione dei componenti R, L, C.

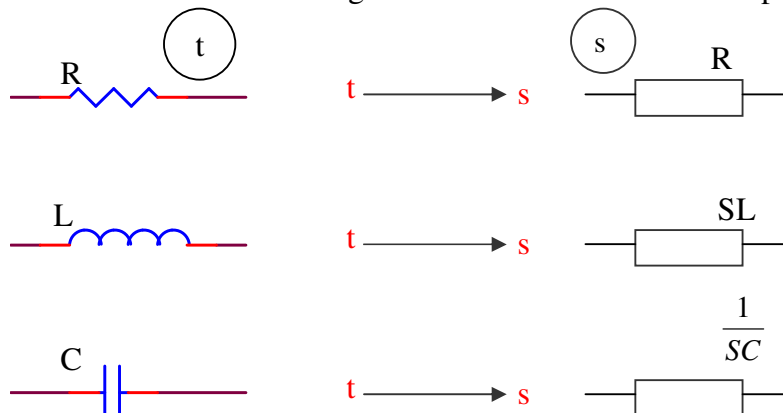






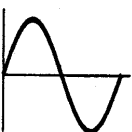
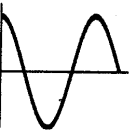


Fig. 11

Vi sono alcuni segnali utilizzati come segnali standard (impulso unitario: gradino, rampa lineare, sinusoidale, ecc.) d'ingresso nell'analisi delle prestazioni dei sistemi di controllo sia in regime transitorio che stazionario; tali segnali vengono chiamati segnali canonici e sono fondamentali perché la risposta di un sistema lineare può essere ricavata come combinazione lineare delle risposte dello stesso sistema ai segnali canonici.

Per eseguire la trasformata delle funzioni principali (impulso unitario; gradino, rampa lineare, sinusoidale, ecc.), si utilizza la tabella 1, tale tabella viene utilizzata anche per l'antitrasformazione.

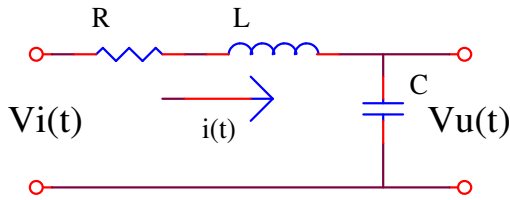
Tabella -1

N°	Grafici	Funzione $f(t)$	Trasformata $F(s)$	Denominazione
1		$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$	Funzione di Dirac
2		$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza unitaria
3		$f(t) = \begin{cases} E & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{E}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza E
4		$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$	Funzione a rampa unitaria
5		$f(t) = \begin{cases} k \cdot t & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{k}{s^2}$	Funzione a rampa con coefficiente angolare k
6		$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{2}{s^3}$	Funzione a parabola unitaria
7		$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \sin(\omega \cdot t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Funzione sinusoidale
8		$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \cos(\omega \cdot t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$	Funzione cosinusoidale

Esempio-1

Esempio di f.d.t di un circuito RLC nel dominio del tempo e nel dominio S

DOMINIO t



$$f.d.t. = \frac{Vu(t)}{Vi(t)}$$

$$Vu(t) = \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)$$

$$Vi(t) = R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)$$

$$f.d.t. = \frac{Vu(t)}{Vi(t)} = \frac{\frac{1}{C} \int i(t) * d(t)}{R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)}$$

DOMINIO S

Trasformazione con Laplace dalla variabile reale tempo alla variabile complessa S:

$t \rightarrow s$

$Vi(t) \rightarrow Vi(s)$

$i(t) \rightarrow I(s)$

$Vu(t) \rightarrow Vu(s)$

$R \rightarrow R$

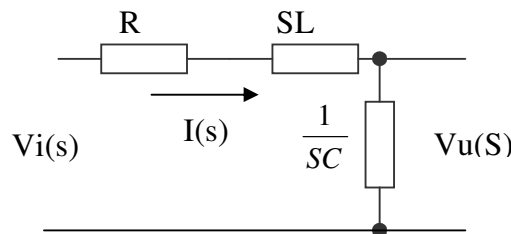
$L \rightarrow SL$

$C \rightarrow \frac{1}{sC}$

$XC = \frac{1}{2\pi f c} = \frac{1}{\omega C}$ Reattanza capacitiva

$XL = 2\pi f L = \omega L$ Reattanza induttiva

si ridisegna il circuito utilizzando la nuova simbologia



$f.d.t. \rightarrow F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)}$

$Vu(s) = \frac{1}{sC} * Is$

$Vi(s) = R * I(s) + SL * I(s) + \frac{1}{sC} * I(s)$

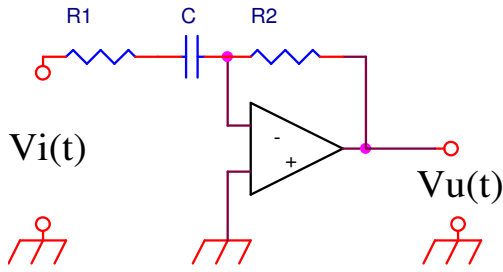
$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = \frac{\frac{1}{sC} * I(s)}{\left(R + SL + \frac{1}{sC} \right) * I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{SRC + S^2LC + 1}{sC}}$

$F(s) = \frac{1}{S^2LC + SRC + 1}$

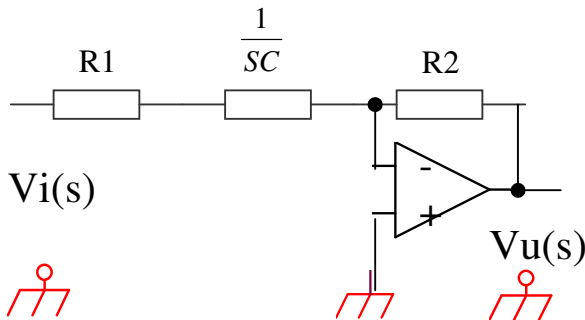
La funzione non ha zeri perché il numeratore è costante ed ha due poli perché il denominatore è un'equazione di secondo grado.

Esercizio-1 Derivatore reale

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S
 Derivatore reale (filtro attivo)



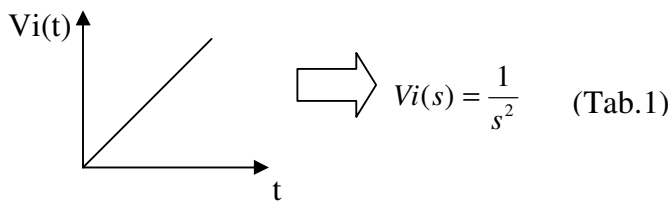
t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	$\frac{1}{sC}$
R2	$\frac{1}{sC}$
C	



$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = -\frac{R2}{R1 + \frac{1}{sC}} = -\frac{R2}{\frac{SR_1C + 1}{SC}} = -\frac{SR_2C}{SR_1C + 1}$$

$$F(S) = -\frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

La funzione ha un polo e uno zero
 Calcolare l'uscita Vu(s) se Vi(s) è una rampa unitaria



$$F(s) = -\frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

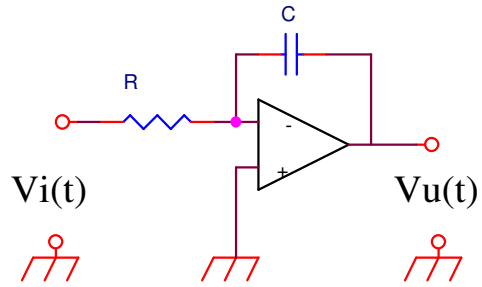
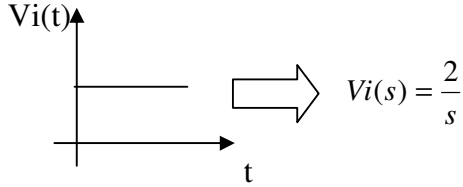
$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} \Rightarrow Vu(s) = Vi(s) * F(s)$$

$$Vu(s) = -\frac{1}{s^2} * \frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

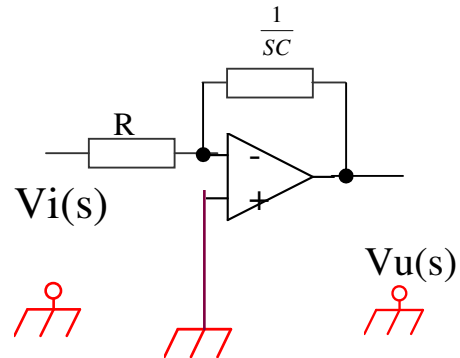
$$Vu(s) = -\frac{R_2C}{S(1 + SR_1C)}$$

Esercizio-2 Integratore Ideale

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio s e l'uscita $V_u(s)$ nell'ipotesi che all'ingresso venga applicato un segnale a gradino di ampiezza 2V.



t	s
$V_i(t)$	$V_i(s)$
$V_u(t)$	$V_u(s)$
R	R
C	$\frac{1}{sc}$



$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{sRC}$$

$$F(s) = -\frac{1}{sRC} \begin{cases} \text{N}^\circ \text{ ZERI} = 0 \\ \text{N}^\circ \text{ POLI} = 1 \end{cases}$$

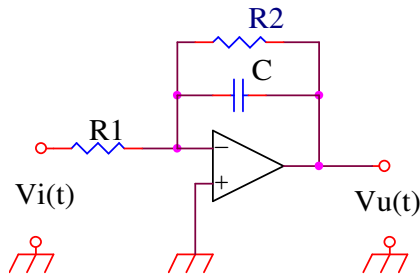
$$V_u(s) = V_i(s) * F(s) = -\frac{2}{s} * \frac{1}{sRC}$$

$$V_u(s) = \frac{2}{s^2 RC}$$

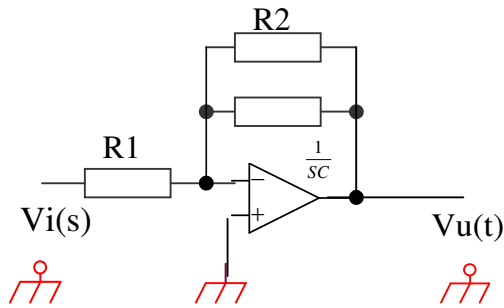
Per passare da $V_u(s)$ a $V_u(t)$ si esegue l'antitrasformata di Laplace $V_u(t) = L^{-1}[V_u(s)]$

Esercizio-3 Integratore Reale

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S



t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	R1
R2	R2
C	$\frac{1}{sC}$

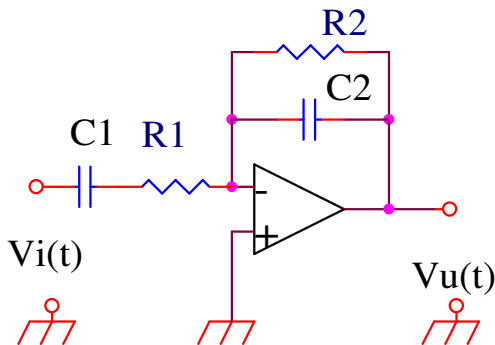


$$Z_f = R2 \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R2 * \frac{1}{sC}}{R2 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{R2}{sC}}{\frac{sR2C + 1}{sC}} = \frac{R2}{sR2C + 1}$$

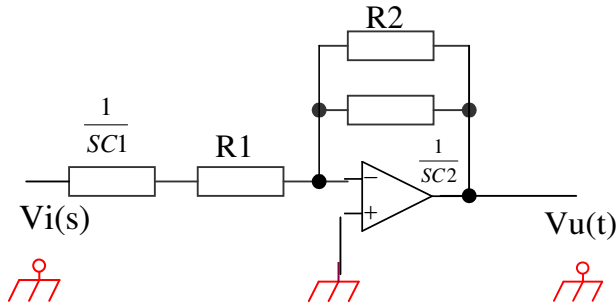
$$F(s) = \frac{Z_f}{R1} = -\frac{\frac{R2}{sR2C + 1}}{R1} = -\frac{R2}{R1(sR2C + 1)} = -\frac{R2}{R1} * \frac{1}{sR2C + 1}$$

Esercizio -4 – Filtro Passa Banda

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S.



t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	R1
R2	R2
C1	$\frac{1}{sC1}$
C2	$\frac{1}{sC2}$



$$Z_f = R2 \parallel \frac{1}{SC2} = \frac{R1 * \frac{1}{SC2}}{R2 + \frac{1}{SC2}} = \frac{\frac{R2}{SC2}}{\frac{SR2C2 + 1}{SC2}} = \frac{R2}{SR2C2 + 1}$$

$$Z_i = \frac{1}{SC1} + R1 = \frac{SR1 + C1 + 1}{SC}$$

$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = -\frac{Z_f}{Z_i} = \frac{\frac{R2}{SR2C2 + 1}}{\frac{SR1 + C1 + 1}{SC1}} = \frac{R2}{SR2C2 + 1} * \frac{SC1}{SR1C1 + 1} = \frac{SR2C1}{(SR2C2 + 1)} * \frac{1}{(SR1C1 + 1)}$$

Esercizio-5

Determinare il valore della funzione di F(s) corrispondente a:

$$S = 0 + J2 \quad F(s) = \frac{S^2 + 5 * (S + 7)}{(S + 3) * (S + 2)}$$

$$\frac{-4 + J10 + 35}{2 + J10} = \frac{31 + J10}{2 + J10} * \frac{2 - J10}{2 - J10} = \frac{62 - J310 + J20 + 100}{4 + 100 + J20 - J20} = \frac{-J290 + 162}{104} = \frac{162}{104} - \frac{J290}{104}$$

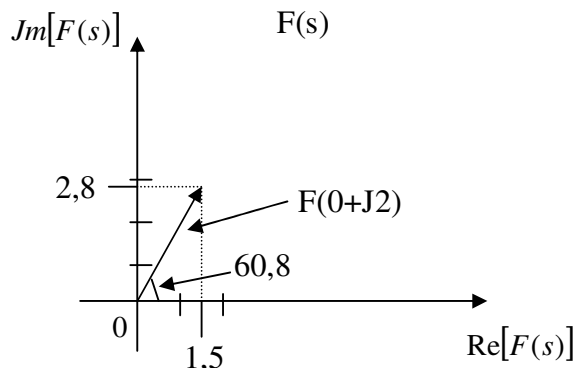
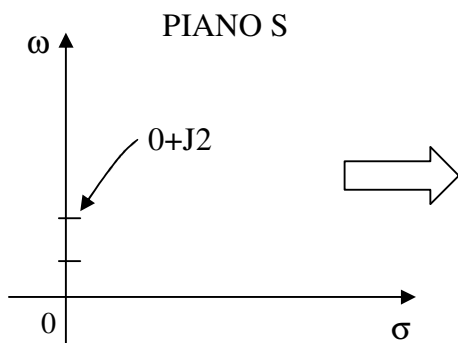
• **Modulo**

$$|F(0 + J2)| = \sqrt{\left(\frac{162}{104}\right)^2 + \left(\frac{290}{104}\right)^2} = \sqrt{2,4 + 7,7} = 3,2$$

• **Fase**

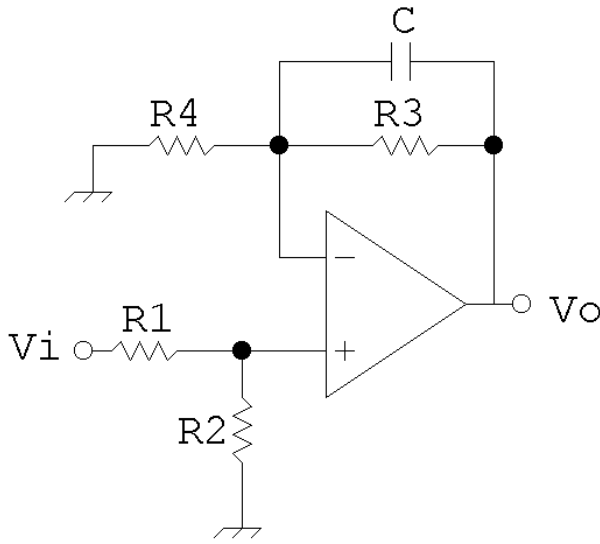
$$\varphi = \arctg \frac{\frac{290}{104}}{\frac{162}{104}} = \arctg \frac{290}{104} * \frac{104}{162} = 60,8^\circ$$

$$S = 0 + J2 \Rightarrow F_{(0+J2)} = \frac{162}{104} - \frac{J290}{104} = 1,5 - J2,8$$

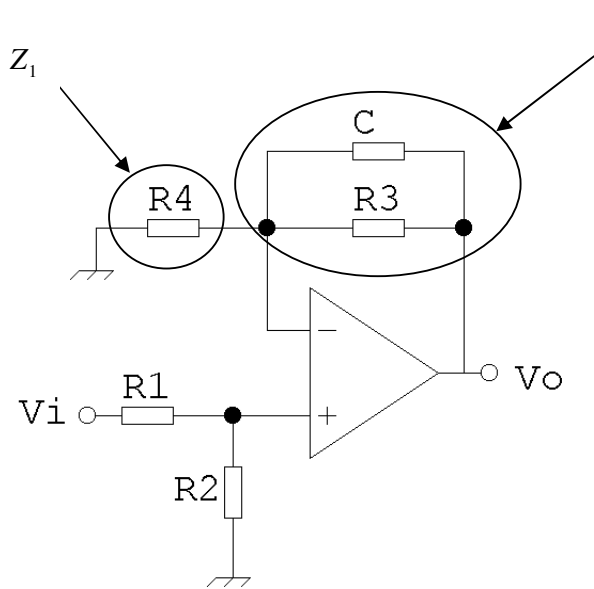


Esercizio -6

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S.



- $V_{1(t)} \Rightarrow V_{1(s)}$
- $V_{U(t)} \Rightarrow V_{U(s)}$
- $R1 \Rightarrow R1 \Rightarrow$
- $R2 \Rightarrow R2 \Rightarrow$
- $R3 \Rightarrow R3 \Rightarrow$
- $R4 \Rightarrow R4 \Rightarrow$
- $C \Rightarrow \frac{1}{sC} \Rightarrow$



$$Z_f \quad V_{U(s)} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * V_{(s)}^+$$

$$V_{(s)}^+ = \frac{R2}{R1 + R2} * V_{1(s)}$$

$$V_{U(s)} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * \frac{R2}{R1 + R2} * V_{1(s)}$$

$$F_{(s)} = \frac{V_{U(s)}}{V_{1(s)}} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * \frac{R2}{R1 + R2}$$

$$Z_f = \frac{1}{\frac{1}{sC} // R3} = \frac{\frac{1}{sC} * R3}{\frac{1}{sC} + R3} = \frac{\frac{R3}{sC}}{\frac{R3sC + 1}{sC}} = \frac{R3}{sCR3 + 1}$$

$$Z_1 = R4$$

$$F_{(s)} = \left(1 + \frac{\frac{R3}{SCR3+1}}{R4} \right) * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \left[1 + \frac{R3}{R4(SCR3+1)} \right] * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \left[\frac{R4(1+SCR3)+R3}{R4(1+SCR3)} \right] * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \frac{R2}{R1+R2} * \left[\frac{R3+R4+SCR3R4}{R4(1+SCR3)} \right]$$

$$F_{(s)} = \frac{R2}{R4(R1+R2)} * \left[\frac{R3+R4+SCR3R4}{1+SCR3} \right]$$

$$F_{(s)} = \frac{R2(R3+R4)}{R4(R1+R2)} * \left[\frac{1+SC}{1+SCR3} \right]$$